Nombre y apellidos: **Puntuación:**

1. La partícula describe un MAS

Una partícula de 100 g de masa describe un movimiento armónico simple, a lo largo del eje X, con una amplitud de 20 cm y una aceleración dada por la expresión: $a = -9\pi^2 x$ (m/s^2). Se sabe que el tiempo empieza a contar cuando la partícula se encuentra en el extremo derecho de su trayectoria.

[a] Calcula el periodo del movimiento y la constante recuperadora del sistema.

[b] Determina, en función del tiempo, la expresión matemática de la elongación.

[c] Halla la energía cinética y la energía potencial de la partícula en el instante t = $\frac{1}{6}$ (s).

[d] Analiza, teniendo en cuenta el valor del periodo, cuál es la posición de la partícula en ese instante y cómo se está moviendo.

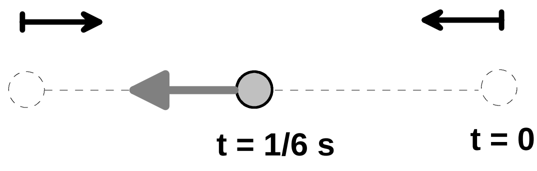
Respuesta

[a] La aceleración en función de la elongación está dada por: ; al compararla con $a = -9\pi^2 x$, se deduce que $\omega^2 = 9\pi^2$ y $\omega = 3\pi(\frac{rad}{s})$.
El periodo es, entonces, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}(s)$. Por otro lado, la constante recuperadora es: $k = m\omega^2 = 0,1 \cdot 9\pi^2 = 0,9\pi^2(\frac{N}{m})$.

[b] La expresión matemática de la elongación es de la forma: $x = A \text{ sen } (\omega t + \phi_o)$. Se conoce ya los valores de la amplitud y de la frecuencia angular, por lo que es necesario hallar el valor de la fase inicial. Del enunciado se deduce que
$\left.\begin{array}{r} t=0 \\ x=0,20\ m \end{array}\right\} 0,20 = 0,20 \cdot sen\ \phi_o;\ sen\ \phi_o = 1;$. La expresión buscada es, entonces, .

[c] La velocidad en cualquier instante está dada por: $v(t) = \frac{dx}{dt} = 0,6\pi\ \cos(3\pi t + \frac{\pi}{2})(\frac{m}{s})$. En el instante $t = \frac{1}{6}(s)$, $v(\frac{1}{6}) = 0,6\pi\ \cos(\pi) = -0,6\pi(\frac{m}{s})$, por lo que la energía cinética en ese momento vale: $E_c = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (-0,6\pi)^2 = 0,178(J)$.
La posición en el instante $t = \frac{1}{6}(s)$ es $x(\frac{1}{6}) = 0,20\ sen(\pi) = 0$; en consecuencia, la energía potencial en ese momento es nula.
Puede comprobarse que la suma de estas dos energías coincide con la energía mecánica: $E_M = \frac{1}{2}kA^2$.

[d] El instante $t = \frac{1}{6}(s)$ corresponde a un cuarto del periodo, por lo que la partícula, que ha comenzado a moverse en el extremo derecho, se encontrará en el origen de coordenadas moviéndose hacia la izquierda.



2. Onda producida por un diapasón en una cuerda

[A] Establece la diferencia entre ondas longitudinales y transversales. Cita un ejemplo de onda real para cada una de ellas.

[B] Se utiliza un diapasón para producir una onda transversal en una cuerda. El diapasón vibra con una frecuencia de 440 Hz y una amplitud de 3,00 mm. La velocidad de la onda es de 220 m/s.

[a] Calcula la longitud de onda, la frecuencia angular y el número de onda.

[b] Escribe la ecuación de la onda si suponemos que la fase inicial es nula y que la onda se propaga en el sentido +X.

[c] Repite el apartado anterior suponiendo que, para x = 0 y t = 0, la perturbación vale -3,00 mm.

[d] Determina cuáles son los valores máximos de la velocidad transversal y de la aceleración transversal de un punto cualquiera de la cuerda.

Respuesta

[A] Consulta el libro de texto.

[B]

[a] Estas tres magnitudes se calculan fácilmente a partir de los datos del enunciado: frecuencia, amplitud y velocidad de la onda. La longitud de onda es $\lambda = v \cdot T = \frac{v}{\nu} = \frac{220(m/s)}{440(Hz)} = 0,5(m)$. La frecuencia angular está dada por: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 440(Hz) = 880\pi = 2,76 \cdot 10^3(\frac{rad}{s})$. El número de onda es $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi(m^{-1})$. Puede comprobarse que el cociente entre la frecuencia angular y el número de onda coincide con la velocidad de propagación de la onda.

[b] La expresión matemática de una onda armónica sin fase inicial y que se propaga en el sentido +X está dada por: $y(x,t) = A\ sen(\omega t - kx)$; en nuestro caso, la ecuación de la onda es: $y(x,t) = 0,003\ sen(880\pi t - 4\pi x)\ (m)$.

[c] Si la onda tiene fase inicial, la expresión general de la misma es: $y(x,t) = A\ sen(\omega t - kx + \phi_o)$. El valor de la fase inicial se deduce de las condiciones iniciales:

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ t=0 \end{array}\right\} -0,003 = 0,003\ sen\ \phi_o$; $sen\ \phi_o = -1$; $\phi_o = -\frac{\pi}{2}(rad)$. La ecuación de la onda es, entonces, $y(x,t) = 0,003\ sen\left(880\pi t - 4\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\ (m)$.

[d] Los valores pedidos son: $|v_{t,\max}| = A\omega = 0,003 \cdot 880\pi = 8,29(\frac{m}{s})$ y $|a_{t,\max}| = A\omega^2 = 0,003 \cdot (880\pi)^2 = 2,29 \cdot 10^4\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

3. XMM-Newton descubriendo los secretos del Universo

[A] ¿Qué es un campo central de fuerzas? Demuestra que el momento angular de una partícula en un campo central de fuerzas se conserva.

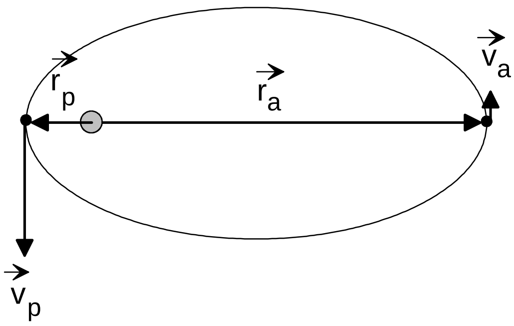
[B] *XMM-Newton* es, con sus 3,8 toneladas de masa, el mayor satélite científico jamás construido en Europa. Estudia la parte más violenta del Universo mediante la detección de los rayos X emitidos; desde lo que ocurre dentro y en torno a los agujeros negros hasta la formación de las galaxias en el inicio del Universo.
XMM-Newton fue lanzado el 10 de diciembre de 1999 por el cohete espacial Ariadne 5 desde Kourou (Guayana Francesa). *XMM-Newton* describe una órbita elíptica en 48 horas. El apogeo de su órbita está a 114.000 km sobre la superficie terrestre y el perigeo está a 7.000 km sobre la superficie de la Tierra. En el perigeo su rapidez de paso sobre la Tierra es de 24.120 km/h.
[a] Averigua la rapidez de *XMM-Newton* en el apogeo de su órbita.
[b] Compara razonadamente los valores, en el apogeo y en el perigeo, de las siguientes magnitudes: energía potencial gravitatoria, aceleración y momento angular.
{DATO: R_T = 6.378 km}

Respuesta

[A] Consulta los apuntes de Física.

[B]

[a] El satélite se mueve sometido a la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra; dicha fuerza es central, por lo que se conserva el momento angular del satélite respecto al centro de nuestro planeta, esto es, $L_{O,apogeo} = L_{O,perigeo}$; $r_a m v_a = r_p m v_p$, ya que en esos puntos el vector de posición y el momento lineal son perpendiculares. Se deduce, tras simplificar la masa, que $v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{24120(km/h)\cdot 13378(km)}{120378(km/h)} = 2681(\frac{km}{h})$, donde se ha tenido en cuenta que $r = R_T + h$. Este resultado es coherente con la segunda ley de Kepler.



[b] La energía potencial gravitatoria está dada por: $E_p = -G\frac{Mm}{r}$. Se trata de una magnitud negativa; como $r_a > r_p$, la energía potencial gravitatoria es menos negativa en el apogeo que en el perigeo, esto es, $E_{p,apogeo} > E_{p,perigeo}$. A la misma conclusión se llega argumentado con la conservación de la energía mecánica.
La aceleración coincide con la intensidad del campo gravitatorio; el módulo de esta magnitud está dado por: $g = G\frac{M}{r^2}$; dado que $r_a > r_p$, la aceleración en el apogeo es menor que en el perigeo.
Acabamos de ver que el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra se conserva; por lo tanto, el momento angular en el apogeo tiene el mismo valor que en el perigeo.

4. El cohete "Pioneer"

[A] Conservación de la energía mecánica en un campo gravitatorio.

[B] Uno de los cohetes "Pioneer" a la Luna, lanzado verticalmente hacia arriba, alcanzó una distancia aproximada de 125.000 km desde el centro de la Tierra, antes de detenerse momentáneamente. Se desprecia el efecto de la Luna sobre el cohete.

[a] Determina la rapidez con que el cohete llegaría a la atmósfera de la Tierra a su regreso. La atmósfera de la Tierra alcanza una altura de 130 km sobre la superficie de la Tierra.

[b] ¿Con qué rapidez fue disparado el cohete?

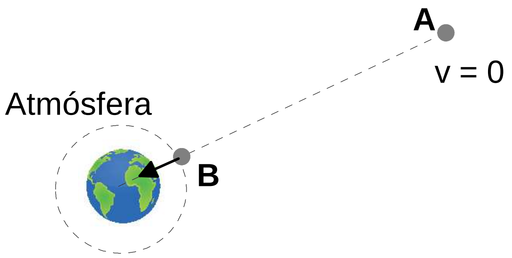
{DATOS: G = 6,67·10^{-11} N.m^2.kg^{-2}; M_T = 5,98·10^{24} kg; R_T = 6370 km}

Respuesta

[A] Consulta el libro de Física.

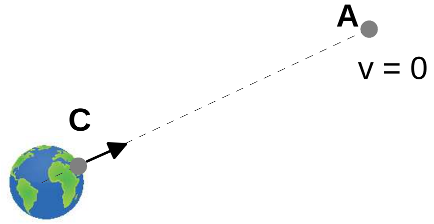
[B]

[a] El cohete evoluciona en un campo conservativo, por lo que su energía mecánica permanece constante: $E_{M,A} = E_{M,B}$; $-G\frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{r_B}$; al simplificar la masa del cohete y reordenar los términos se llega a: $\frac{1}{2}v_B^2 = GM(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$.
Por otro lado, se sabe que
$r_A = 125000\ km = 1{,}25 \cdot 10^8\ m$ y que
$r_B = 6370 + 130 = 6500\ km = 6{,}5 \cdot 10^6\ m$.



Por lo tanto,
$v_B^2 = 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}5 \cdot 10^6} - \frac{1}{1{,}25 \cdot 10^8}\right) = 1{,}17 \cdot 10^8 (\frac{m}{s})^2$;
$v_B = 1.08 \cdot 10^4 (\frac{m}{s})$.

[b] Por la conservación de la energía mecánica, $E_{M,C} = E_{M,A}$; $-G\frac{Mm}{R_T} + \frac{1}{2}mv_C^2 = -G\frac{Mm}{r_A}$; se simplifica la masa del cohete: $v_C^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_A}\right)$
$v_C^2 = 7{,}98 \cdot 10^{14}\left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{1{,}25 \cdot 10^8}\right)$
$v_C^2 = 1{,}19 \cdot 10^8 (\frac{m}{s})^2$; la rapidez de lanzamiento es: $v_C = 1{,}09 \cdot 10^4 (\frac{m}{s})$.



Se puede comparar este resultado con el obtenido en el apartado anterior. Si se hubiese lanzado el cohete desde el límite de la atmósfera el resultado habría sido el del apartado (a). Como se ha lanzado desde la superficie terrestre, la rapidez de lanzamiento tiene que ser algo mayor.

5. Campo creado por dos cargas

[A] Descripción vectorial del campo electrostático: intensidad de campo.

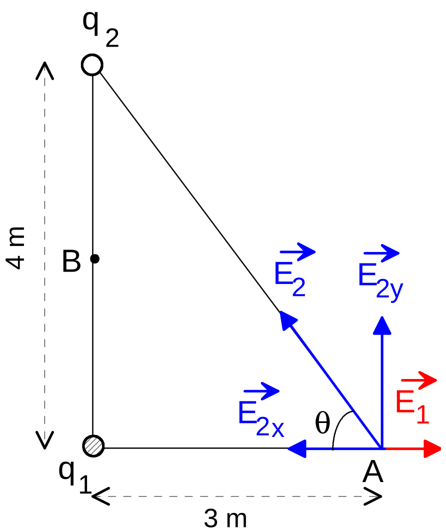
[B] Dos cargas puntuales $q_1=2\cdot10^{-9}$ C y $q_2=-25\cdot10^{-9}$ C se encuentran situadas en los vértices del triángulo rectángulo de la figura.

[a] Calcula la intensidad del campo eléctrico resultante (módulo, dirección y sentido) en el vértice A.

[b] Halla el potencial eléctrico en el vértice A y en el punto medio (B) del segmento que une las cargas q_1 y q_2 .

[c] ¿Cuál es el trabajo realizado cuando un electrón se desplaza desde el punto A hasta el punto B? Interpreta el resultado obtenido.

{DATOS: Carga del electrón en valor absoluto: e = 1,60·10^-19 C; constante de Coulomb: K = 9,00·10^9 N.m².C^-2}



Respuesta

[A] Consulta el libro de Física.
[B]

[a] En primer lugar, se dibuja los vectores intensidad del campo eléctrico debidos a las dos cargas. En segundo lugar, se calcula sus módulos:

$$E_1 = 9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-9}}{9} = 2(\tfrac{N}{C}) \text{ y } E_2 = 9\cdot10^9\frac{25\cdot10^{-9}}{25} = 9(\tfrac{N}{C})$$

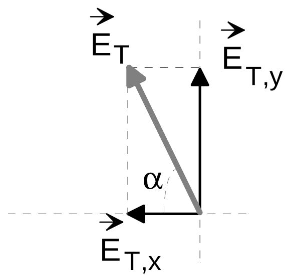
En tercer lugar, se obtiene las componentes de la intensidad de campo $\vec{E}_2$:

$$E_{2x} = E_2 \cos\theta = 9\cdot\tfrac{3}{5} = 5,4(\tfrac{N}{C});\ E_{2y} = E_2\ sen\theta = 9\cdot\tfrac{4}{5} = 7,2(\tfrac{N}{C})$$

A continuación, se calcula las componentes de la intensidad de campo resultante, así como el módulo, la dirección y el sentido:

$$\vec{E}_T\begin{cases} E_{Tx} = 2-5,4 = -3,4(\tfrac{N}{C}) \\ E_{T,y} = 7,2(\tfrac{N}{C}) \end{cases} \quad \vec{E}_T\begin{cases} Módulo: E_T = \sqrt{(-3,4)^2+(7,2)^2} = 7,96(\tfrac{N}{C}) \\ Dirección\ y\ sentido: tg\alpha = \frac{7,2}{3,4} = 2,12;\ \alpha = 64,7^o \end{cases}$$

Este ángulo está referido a la figura adjunta; respecto al sentido positivo del eje X el ángulo es de 115,3º.



[b] $V_A = 9\cdot10^9(\frac{2\cdot10^{-9}}{3} - \frac{25\cdot10^{-9}}{5}) = 6-45 = -39(V)$

$V_B = 9\cdot10^9(\frac{2\cdot10^{-9}}{2} - \frac{25\cdot10^{-9}}{2}) = 9-112,5 = -103,5(V)$

[c] En un campo conservativo se cumple que el trabajo es igual a menos la variación de la energía potencial, esto es,

$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -q_e\Delta V = -q_e(V_B - V_A)$

$W_{A\to B} = -1,6\cdot10^{-19}(-103,5+39) = -1,03\cdot10^{-17}(J)$

El hecho de que este trabajo sea negativo significa que ha sido realizado por un agente exterior, en contra de las fuerzas del campo. Por otro lado, se sabe que las cargas negativas se mueven espontáneamente en el sentido de los potenciales crecientes: de B a A; por lo tanto, de A a B es un proceso forzado.

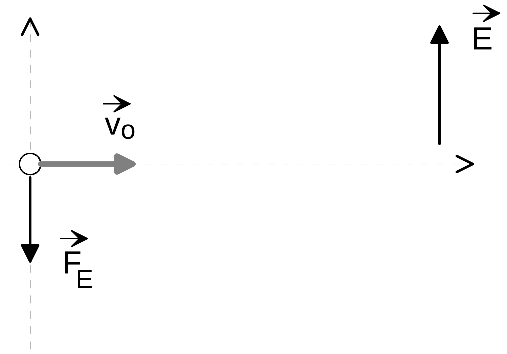
6. Movimiento de una partícula en un campo eléctrico uniforme

Un electrón, de masa $9{,}11\cdot10^{-31}$ kg y carga $-1{,}60\cdot10^{-19}$ C, penetra, con una velocidad horizontal de $2{,}00\cdot10^{6}$ m/s hacia la derecha, en un campo eléctrico uniforme de 400 N/C de intensidad, dirigido verticalmente hacia arriba.

[a] Halla la aceleración del electrón.
[b] ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 20,0 cm en dirección horizontal?
[c] ¿Cuál es la distancia vertical recorrida en ese tiempo?
[d] Determina la ecuación de la trayectoria.

Respuesta

[a] El movimiento del electrón es el resultado de la composición de dos movimientos: uno, horizontal y uniforme; y otro, vertical y uniformemente acelerado.



Eje X
$a_x = 0$
$v_x = v_o = 2\cdot10^6$ (m/s)
$x = v_o t = 2\cdot10^6\ t$ (m)
Eje Y
$a_y = -\frac{|q_e|E}{m_e} = -\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot400}{9{,}11\cdot10^{-31}} = -7{,}03\cdot10^{13}\left(\frac{m}{s^2}\right)$
$v_y = -7{,}03\cdot10^{13}t$
$y = -3{,}51\cdot10^{13}t^2$
La aceleración del electrón es vertical y hacia abajo, con el módulo que se ha calculado.

[b] De la ecuación de la posición horizontal se obtiene que: $t = \frac{0{,}20(m)}{2\cdot10^6(m/s)} = 10^{-7}(s)$.

[c] De la ecuación de la posición vertical se deduce que: $y = -3{,}51\cdot10^{13}\cdot10^{-14} = -0{,}351(m)$.

[d] La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo *t* entre las ecuaciones de *x* e *y*. De la primera se deduce que: $t = \frac{x}{2\cdot10^6}$; sustituyendo este valor en la segunda, se tiene: $y = -3{,}51\cdot10^{13}\left(\frac{x}{2\cdot10^6}\right)^2 = -8{,}78x^2$, ecuación que corresponde a una parábola con vértice en el origen, tal como se muestra en la siguiente gráfica.

Puede comprobarse también que cuando el electrón ha recorrido 20 cm en horizontal, ha descendido 35,1 cm en vertical.