Nombre y apellidos: Puntuación:

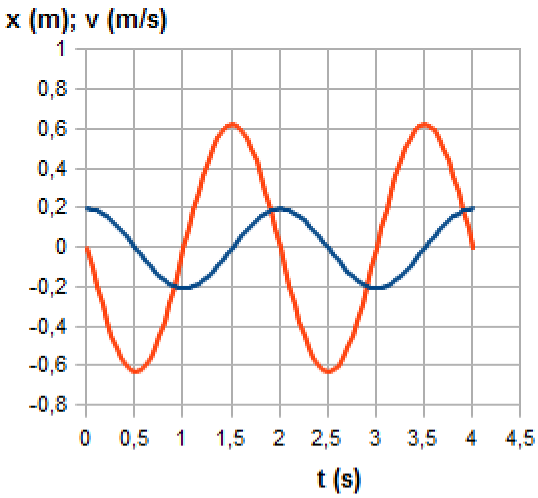
# 1. Las gráficas del oscilador armónico

En la figura se muestra al gráfica elongación-tiempo de una partícula de 0,50 kg de masa que realiza una oscilación armónica alrededor del origen de coordenadas.

[a] Escribe la ecuación de la elongación, en función del tiempo, para este movimiento.

[b] Deduce la ecuación de la velocidad, en función del tiempo, y represéntala gráficamente en la figura anterior.

[c] Calcula las energías cinética, potencial y mecánica de la partícula en el instante t = 1,2 s.




## Respuesta

[a] La elongación, en función del tiempo, está dada por una función del tipo: $x(t) = A\ sen(\omega t + \phi_o)$. En este caso, de la gráfica se deduce que A = 0,2 m y que el periodo T = 2 s, por lo que la frecuencia angular vale: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{rad}{s}$; en la gráfica también se observa que, para t=0, x = 0,2 m; llevando esta condición a la ecuación de la elongación queda: $0,2 = 0,2\ sen\ \phi_o$; $sen\ \phi_o = 1$; . En consecuencia, la ecuación de la elongación es: $x(t) = 0,2\ sen\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m).

[b] La ecuación de la velocidad se obtiene al derivar la elongación con respecto al tiempo: $v(t) = \frac{dx}{dt} = 0,2\pi\ \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$(m/s). Para representar esta función nos fijamos en algunos instantes de interés, tal como se recoge en la siguiente tabla:

| **t (s)** | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **v (m/s)** | 0 | -0,2π | 0 | 0,2π | 0 |

[c] La constante recuperadora es $k = 0,5\pi^2(\frac{N}{M})$. Se calcula el valor de la elongación en ese instante: $x(1,2) = 0,2 \cdot sen(1,7\pi) = -0,16(m)$, con lo que la energía potencial elástica es: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}0,5\pi^2(-0,16)^2 = 6,32 \cdot 10^{-2}(J)$.
Por otro lado, la velocidad en ese instante es: $v(1,2) = 0,2\pi \cdot \cos(1,7\pi) = 0,37(\frac{m}{s})$ y la energía cinética, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 0,37^2 = 3.42 \cdot 10^{-2}(J)$.
La energía mecánica es la suma de ambas: $E_M = E_c + E_p = 9,74 \cdot 10^{-2}(J)$. Este resultado debe coincidir con el calculado mediante: $E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}0,5\pi^2 0,2^2 = 9,87 \cdot 10^{-2}(J)$.

## 2. Las ondas armónicas también se suman

Una onda armónica transversal está representada por la ecuación: $y(x,t)=0,05sen(1992t-6x)$, donde las distancias están dadas en *m* y el tiempo en *s*.

[a] Deduce los valores de la amplitud, la frecuencia y la longitud de onda de las vibraciones.

[b] Halla la distancia recorrida por la onda en 3,0 s.

[c] Escribe la ecuación de una onda idéntica a la anterior, pero que se propague en sentido contrario.

[d] Halla la amplitud de la onda resultante de la interferencia de las dos ondas anteriores: la del enunciado y la del apartado [c].

*{AYUDA:* $senA+senB=2sen\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$*}*

## Respuesta

[a] La expresión general de una onda armónica es: $y(x,t)=A\ sen(\omega t-kx)$. Al compararla con la del enunciado, vemos que A = 0,05 m, $\omega=1992(\frac{rad}{s})$ y $k=6(m^{-1})$. La frecuencia es, entonces, $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1992}{2\pi}=317(Hz)$ y la longitud de onda, $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{6}=1,05(m)$.

[b] Se calcula la velocidad de propagación de la onda: $v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{1992}{6}=332(\frac{m}{s})$, resultado al que también se llega mediante la expresión: $v=\lambda\cdot\nu$. La distancia recorrida por la onda en 3 s es, por lo tanto, Δx = vt = 332·3 = 996 m.

[c] La ecuación pedida se obtiene sencillamente cambiando el signo de la fase: $y'(x,t)=0,05\ sen(1992t+6x)$.

[d] La onda resultante se obtiene sumando las dos ondas: $y_T=y+y'=0,05\ [sen(1992t-6x)+sen(1992t+6x)]$; para utilizar la relación trigonométrica de la ayuda, sea $\left\{\begin{array}{l} A=1992t-6x \\ B=1992t+6x \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{A+B}{2}=1992t \\ \frac{A-B}{2}=-6x \end{array}\right.$ ; por lo tanto, la ecuación de la onda resultante es: $y_T(x,t)=0,1\ \cos(-6x)sen(1992t)$.
Se ha obtenido un conjunto de MAS de amplitud variable: $A_T$ = 0,1·cos(6x) (recuerda que los cosenos de ángulos opuestos son iguales). Se trata de una onda estacionaria.

# 3. El primer satélite artificial

**[A]** Desarrolla el siguiente tema: *Momento angular de una partícula. Momento de una fuerza. Relación entre ambas*. Incluye esquemas aclaratorios.

**[B]** El 5 de octubre de 1957, la URSS lanzó el primer satélite artificial de la Tierra. Se informó que daría vueltas alrededor de la misma a una altura de 940 km sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la órbita fuese circular, calcula:

[a] la rapidez del satélite;

[b] el periodo del mismo;

[c] el peso orbital de una pieza del satélite de 70 kg de masa;

[d] el momento angular (en módulo, dirección y sentido) de dicha pieza del satélite.

*{DATOS: $GM_T = 4{,}0\cdot 10^{14}$ N·m²·kg⁻¹; $R_T = 6370$ km}*

## Respuesta

[A] Véase el libro y los apuntes de Física.

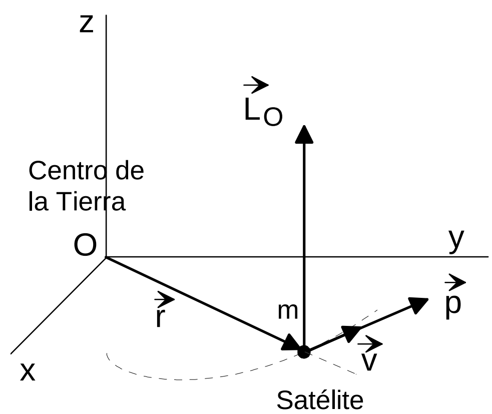
[B]

[a] La fuerza gravitatoria se comporta como fuerza centrípeta, por lo que, aplicando la 2ª ley de Newton al movimiento del satélite, queda: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = G\frac{M_T}{r}$. El radio de la órbita es $r = 6370 + 940 = 7310(km) = 7{,}31\cdot 10^6(m)$. La rapidez del satélite es, entonces, $v = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{14}}{7{,}31\cdot 10^6}} = 7{,}40\cdot 10^3(\frac{m}{s})$.

[b] El periodo del satélite se puede calcular también mediante la 2ª ley de Newton escribiendo la aceleración centrípeta de forma adecuada. Sin embargo, el procedimiento más sencillo es: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 7{,}31\cdot 10^6}{7{,}40\cdot 10^3} = 6{,}21\cdot 10^3(s) \simeq 1{,}72(h)$.

[c] El peso es igual al producto de la masa por la intensidad del campo gravitatorio a esa distancia: $P = mg = m\frac{GM_T}{r^2} = 70\cdot\frac{4\cdot 10^{14}}{(7{,}31\cdot 10^6)^2} = 524(N)$.

[d] El momento angular de una partícula respecto a un punto es igual al producto vectorial del vector de posición por el momento lineal, esto es, $\vec{L}_O = \vec{r}\times m\vec{v}$. Al ser la órbita circular, los vectores y $\vec{p}$ son perpendiculares, por lo que el módulo del momento angular vale: $L_O = rmv = 7{,}31\cdot 10^6\cdot 70\cdot 7{,}40\cdot 10^3 = 3{,}79\cdot 10^{12}\left(\frac{kg\cdot m^2}{s}\right)$. La dirección y el sentido se muestran en la figura siguiente:



# 4. ¿Qué pasa con los marcianos?

**[A]** Relaciona la energía de un satélite y las órbitas que describe. Velocidad de escape.

**[B]** El radio del planeta Marte es de $3{,}32 \cdot 10^6$ m y la aceleración de la gravedad en un punto de su superficie vale 3,87 m/s².

[a] Halla la masa de Marte.

[b] ¿Cuál es la velocidad de escape de Marte?

[c] Si se lanza desde la superficie de Marte un proyectil con la velocidad de escape, ¿cuál será su rapidez cuando diste del centro del planeta $10^7$ m?

*{DATO: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$}*

## Respuesta

[A] Véase el libro y los apuntes de Física.

[B]

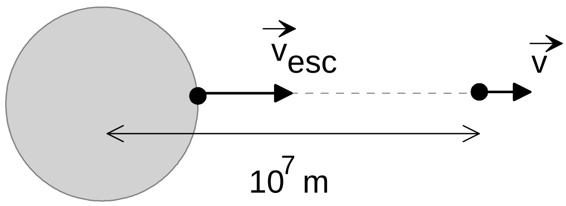
[a] La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte está dada por: $g_o = \frac{GM}{R^2}$, de donde se deduce que la masa de Marte será: $M = \frac{g_o R^2}{G} = \frac{3{,}87 \cdot (3{,}32 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}40 \cdot 10^{23} (kg)$.

[b] La expresión matemática de la velocidad de escape puede ser deducida de la ley de conservación de la energía mecánica: $E_{M,\text{ superficie marciana}} = E_{M,\text{infinito}}$ ; $-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_{esc}^2 = 0$, de donde se deduce, tras simplificar la masa del objeto, que:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}40 \cdot 10^{23}}{3{,}32 \cdot 10^6}} = 5.07 \cdot 10^3 \left(\frac{m}{s}\right).$$

[c] Se cumple que la energía mecánica permanece constante: $E_{M,\text{inicial}} = E_{M,\text{final}}$; $-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_{esc}^2 = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2$. El miembro de la derecha es nulo, como se acaba de ver en el apartado anterior. Si se simplifica la masa del proyectil, queda: $-G\frac{M}{r} + \frac{1}{2} v^2 = 0$, de donde se deduce que la rapidez buscada es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}40 \cdot 10^{23}}{10^7}} = 2{,}92 \cdot 10^3 \left(\frac{m}{s}\right)$$




*(El dibujo no está hecho a escala)*

# 5. Fuerza ejercida por un dipolo

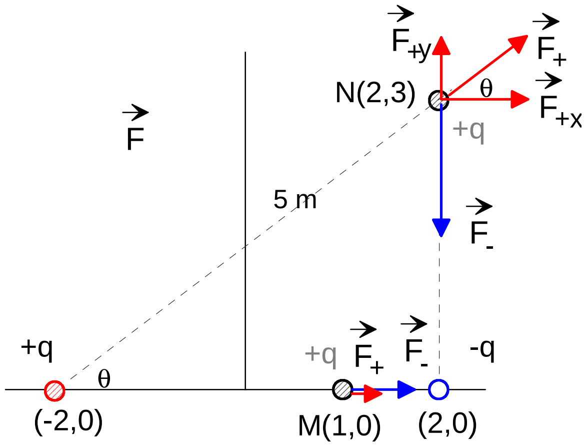
**[A]** Ley de Coulomb: expresión y significado.
**[B]** Un dipolo está formado por dos cargas puntuales, +q y -q, que se encuentran fijas en los puntos (-2, 0) m y (2, 0) m, respectivamente. Calcula la fuerza resultante sobre una tercera carga puntual +q en los puntos M (1, 0) m y N (2, 3) m. Se supone conocido el valor de k.

## Respuesta

[A] Véase el libro y los apuntes de Física.

[B]

En primer lugar, se traza un esquema con la situación descrita.




Punto M

- Se dibuja las fuerzas y se calcula sus módulos: $F_+ = k\frac{q^2}{9}(N)$; $F_- = k\frac{q^2}{1}(N)$.
- Dado que estas dos fuerzas tienen la misma dirección y el mismo sentido, la fuerza resultante, horizontal y hacia la derecha, tiene como módulo la suma de los módulos:
  $F_T = k\frac{q^2}{9} + k\frac{q^2}{1} = \frac{10}{9}kq^2(N)$.

Punto N

- Se dibuja las fuerzas y se calcula sus módulos: $F_+ = k\frac{q^2}{25}(N)$; $F_- = k\frac{q^2}{9}(N)$.
- Se deducen los módulos de las componentes de la primera de ellas:
  $F_{+,x} = F_+ \cdot \cos\,\theta = k\frac{q^2}{25}\frac{4}{5} = \frac{4kq^2}{125}(N)$
  $F_{+,y} = F_+ \cdot sen\,\theta = k\frac{q^2}{25}\frac{3}{5} = \frac{3kq^2}{125}(N)$
- Las componentes de la fuerza resultante son, entonces,
  $$\left\{\begin{array}{c} F_{T,x} = \frac{4kq^2}{125}(N) \\ F_{T,y} = \frac{3kq^2}{125} - k\frac{q^2}{9} = \frac{-98}{1125}kq^2(N) \end{array}\right\} \vec{F}_T = 0,032kq^2\vec{i} - 0,087kq^2\vec{j}(N)$$
  El módulo de esta fuerza es: $F_T = kq^2\sqrt{0,032^2 + (-0,087)^2} = 0,093kq^2(N)$. La dirección y el sentido puede establecerse a partir del ángulo que forma la dirección de la fuerza con el semieje +OX: $tg\ \alpha = \frac{-0,087}{0,032} = -2,72$; $\alpha = -70^o = 290^o$.

# 6. Conservación de la energía con fuerzas eléctricas

Un **positrón** (la antipartícula del electrón) tiene una masa de $9{,}11\cdot10^{-31}$ kg y una carga de $+1{,}60\cdot10^{-19}$ C. Imagina que un positrón se desplaza en las cercanías de una partícula alfa, cuya carga es de $+3{,}20\cdot10^{-19}$ C. La masa de la partícula alfa es varios miles de veces mayor que la del positrón, por lo que consideraremos que está en reposo y que sirve como sistema de referencia. Cuando el positrón está a $1{,}00\cdot10^{-10}$ m de la partícula alfa, se aleja directamente de ésta con una rapidez de $3{,}00\cdot10^{6}$ m/s.

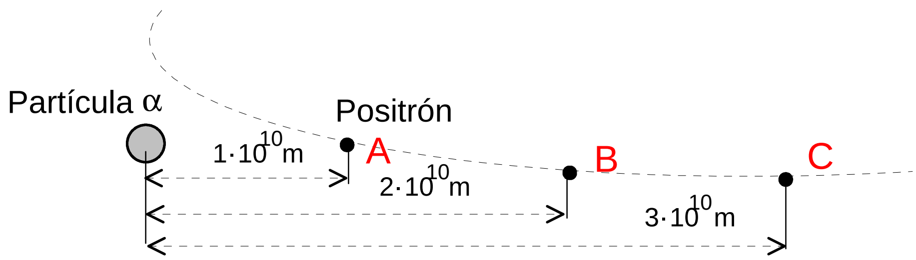
[a] ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están a $2{,}00\cdot10^{-10}$ m y cuando se encuentran a $3{,}00\cdot10^{-10}$ m una de la otra?

[b] ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy, muy lejos de la partícula alfa?

*DATO: Constante de Coulomb: $K = 9\cdot10^{9}$ N.m².C⁻²}*

## Respuesta

[a] Se hace un esquema del fenómeno descrito.




El positrón evoluciona en un campo conservativo, por lo que la energía mecánica permanece constante. Así, $E_M(A) = E_M(B)$, esto es, $\frac{1}{2}mv_A^2 + k\frac{q_\alpha q_p}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 + k\frac{q_\alpha q_p}{r_B}$;

$\frac{1}{2}9{,}11\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^6)^2 + 9\cdot10^9\frac{5{,}12\cdot10^{-38}}{10^{-10}} = \frac{1}{2}9{,}11\cdot10^{-31}v_B^2 + 9\cdot10^9\frac{5{,}12\cdot10^{-38}}{2\cdot10^{-10}}$;

$4{,}10\cdot10^{-18} + 4{,}61\cdot10^{-18} = 4{,}56\cdot10^{-31}v_B^2 + 2{,}30\cdot10^{-18}$;

$6{,}41\cdot10^{-18} = 4{,}56\cdot10^{-31}v_B^2$; $v_B = \sqrt{\frac{6{,}41\cdot10^{-18}}{4{,}56\cdot10^{-31}}} = 3{,}75\cdot10^6(\frac{m}{s})$.

De manera análoga, $E_M(A) = E_M(C)$, por lo que: $\frac{1}{2}mv_A^2 + k\frac{q_\alpha q_p}{r_A} = \frac{1}{2}mv_C^2 + k\frac{q_\alpha q_p}{r_C}$;

$\frac{1}{2}9{,}11\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^6)^2 + 9\cdot10^9\frac{5{,}12\cdot10^{-38}}{10^{-10}} = \frac{1}{2}9{,}11\cdot10^{-31}v_C^2 + 9\cdot10^9\frac{5{,}12\cdot10^{-38}}{3\cdot10^{-10}}$;

$4{,}10\cdot10^{-18} + 4{,}61\cdot10^{-18} = 4{,}56\cdot10^{-31}v_C^2 + 1{,}54\cdot10^{-18}$

$7{,}17\cdot10^{-18} = 4{,}56\cdot10^{-31}v_C^2$; $v_C = \sqrt{\frac{7{,}17\cdot10^{-18}}{4{,}56\cdot10^{-31}}} = 3{,}97\cdot10^6(\frac{m}{s})$.

Estos resultados son coherentes con el hecho de que las partículas se repelen.

[b] Hay que entender ahora que cuando el positrón se encuentra muy, muy lejos, su energía potencial eléctrica es nula; por lo tanto, $E_M(A) = E_M(\infty)$, $\frac{1}{2}mv_A^2 + k\frac{q_\alpha q_p}{r_A} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$. Aprovechando los cálculos anteriores, $8{,}71\cdot10^{-18} = 4{,}56\cdot10^{-31}v_\infty^2$;

$v_\infty = \sqrt{\frac{8{,}71\cdot10^{-18}}{4{,}56\cdot10^{-31}}} = 4{,}37\cdot10^6(\frac{m}{s})$.