Nombre y apellidos: **Puntuación:**

1. Primero vertical, luego horizontal

Un muelle, de masa despreciable, se deforma 20 cm cuando se le cuelga un cuerpo de 1,0 kg de masa (figura 1). A continuación, se coloca sin deformación, unido al mismo cuerpo, sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como se indica en la figura 2. En esta posición se tira del cuerpo 2,0 cm y se suelta.

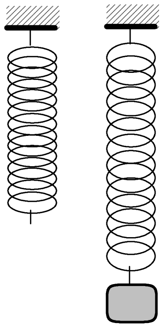


Figura 1

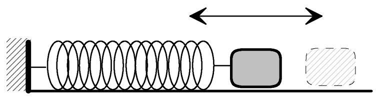


Figura 2

[a] La ecuación de la posición para el movimiento armónico simple resultante.

[b] Las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo $t = \frac{3}{4}T$, donde T es el periodo del m.a.s.

Respuesta

[a] La ecuación de la posición está dada por: $x(t) = A\ sen(\omega t + \phi_o)$, donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Se necesita, en primer lugar, calcular el valor de la constante recuperadora *k*; en la fig. 1 vemos que el peso del cuerpo es igual a la fuerza recuperadora, por lo que: $mg = k\Delta L$; de donde se deduce que: $k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{1(kg)\cdot 9,8(N/kg)}{0,2(m)} = 49\ \frac{N}{m}$. En consecuencia, $\omega = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7\ \frac{rad}{s}$.
Por otro lado, la amplitud es *A = 0,02 cm*; para calcular la fase inicial hay que tener en cuenta que $\left\{ \begin{array}{c} t = 0 \\ x = 0,02\ m \end{array} \right\} 0,02 = 0,02\ \text{sen}\ \phi_o$; $sen\ \phi_o = 1$; $\phi_o = \frac{\pi}{2}\ rad$. La ecuación de la posición es, entonces, $x(t) = 0,02\ sen\left(7t + \frac{\pi}{2}\right)$ m.

[b] La ecuación de la velocidad se obtiene derivando, con respecto al tiempo, la ecuación de la posición; así, $v(t) = \frac{dx}{dt} = 0,14\ \cos\left(7t + \frac{\pi}{2}\right)$; en el instante $t = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{7} = \frac{6\pi}{28} = \frac{3\pi}{14}\ s$, la velocidad vale: $v\left(\frac{3\pi}{14}\right) = 0,14\ \cos\left(7 \cdot \frac{3\pi}{14} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,14\ \cos(2\pi) = 0,14\ \frac{m}{s}$; el valor de la energía cinética es, pues, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,14^2 = 9,8 \cdot 10^{-3}\ J$.
La posición del oscilador, en el instante considerado, está dada por:
$x\left(\frac{3\pi}{14}\right) = 0,02\ sen\left(7 \cdot \frac{3\pi}{14} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,02\ sen(2\pi) = 0$; por lo tanto, la energía potencial elástica es también nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial elástica, es: $9,8\cdot 10^{-3}$ *J.* Este valor también puede obtenerse por cálculo directo:
$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 49\left(\frac{N}{m}\right) \cdot 0,02^2(m^2) = 9,8 \cdot 10^{-3}\ J.$

Estos resultados son coherentes con el hecho de que el oscilador, en el instante $t = \frac{3}{4}T$, se encuentra en la posición de equilibrio moviéndose hacia la derecha.

2. A la orilla del mar

A una playa llegan 15 olas por minuto y se observa que tardan 5 minutos en arribar desde un barco anclado en el mar a 600 m de la playa.

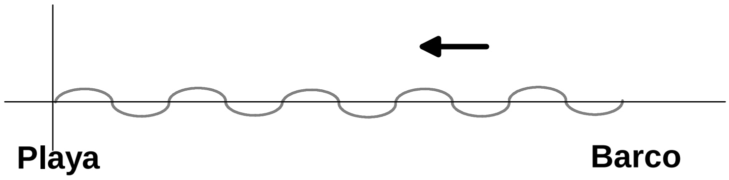
[a] Tomando como origen de coordenadas un punto de la playa, escribe la ecuación de la onda si la amplitud de las olas es de 50 cm. Considera que la fase inicial es nula. Dibuja un esquema aclaratorio.

[b] A una distancia 300 m de la playa existe una boya, que sube y baja según pasan las olas. Determina la expresión matemática que permite calcular su velocidad en cualquier instante de tiempo.

[c] El sonido producido por la sirena del barco alcanza un nivel de intensidad sonora de 60 dB a 25 m de distancia. Considerando la sirena como un foco sonoro puntual, halla la intensidad de la onda sonora y la potencia de la sirena. *{DATO: Intensidad sonora umbral: $I_O = 10^{-12}$ W/m²}*

Respuesta

[a] De la información inicial se deduce los valores del periodo y de la velocidad de propagación de las ondas: $T = \frac{60(s)}{15} = 4\ s$ y $v_p = \frac{600(m)}{300(s)} = 2\ \frac{m}{s}$. La ecuación de la onda es de la forma: $y(x,t) = A\ sen(\omega t \pm kx)$, ya que la fase inicial es nula. Calculamos la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\ \frac{rad}{s}$ y el número de ondas: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{4}\ m^{-1}$.



Las olas se desplazan en el sentido de las X negativas; por lo tanto, la ecuación de la onda es: $y(x,t) = 0,5\ sen\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}x\right)$.

[b] En el punto donde se encuentra la boya, la ecuación de la onda es: $y(300,t) = 0,5\ sen\left(\frac{\pi}{2}t + 75\pi\right)$. La velocidad transversal de la boya se obtiene derivando esta expresión con respecto al tiempo: $v(300,t) = 0,25\pi\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t + 75\pi\right)\ \frac{m}{s}$.

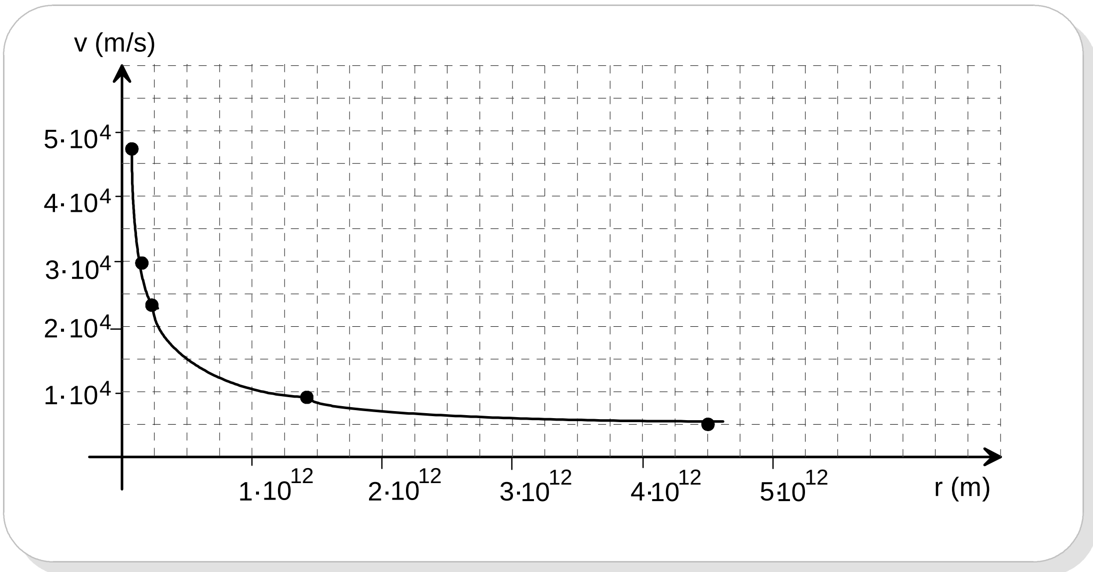
[c] El nivel de intensidad sonora está dado por la expresión: $\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$. De esta ecuación se deduce que: $I = I_O 10^{\frac{\beta}{10}}$. En nuestro caso, $\beta = 60\ dB$, por lo que la intensidad de la onda sonora es: $I = 10^{-12} 10^{6} = 10^{-6}\ \frac{W}{m^2}$. Por otro lado, $I = \frac{P}{S}$, donde *P* es la potencia de la fuente sonora y *S* la superficie esférica alcanzada por la onda; se cumple que $P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2 = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 25^2 = 7,85 \cdot 10^{-3}\ W$.

3. La rapidez de los planetas

[a] Demuestra que la rapidez de un planeta en su órbita, supuesta circular, está dada por: $v = \sqrt{gr}$, siendo r el radio de la órbita y g la intensidad del campo gravitatorio solar en los puntos de dicha órbita.

[b] Completa la siguiente tabla y representa gráficamente la rapidez v frente al radio r.

	r (m)	v (m/s)
Mercurio	$5{,}79\cdot 10^{10}$	*$4{,}77\cdot 10^{4}$*
Tierra	$1{,}50\cdot 10^{11}$	*$2{,}97\cdot 10^{4}$*
Marte	$2{,}27\cdot 10^{11}$	*$2{,}41\cdot 10^{4}$*
Saturno	$1{,}43\cdot 10^{12}$	*$0{,}961\cdot 10^{4}$*
Neptuno	$4{,}50\cdot 10^{12}$	*$0{,}542\cdot 10^{4}$*



[c] Marte gira alrededor del Sol describiendo una órbita ligeramente elíptica; en el afelio, su distancia al Sol es de $2{,}47\cdot 10^{8}$ km y en perihelio es de $2{,}08\cdot 10^{8}$ km. Determina la relación entre las rapideces máxima y mínima que puede alcanzar Marte en su recorrido alrededor del Sol. ¿Qué ley has aplicado?

{DATO: $GM_{Sol} = 1{,}32\cdot 10^{20}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-1}$ m}

Respuesta

[a] Para un planeta en su órbita alrededor del Sol se cumple que la fuerza gravitatoria de comporta como fuerza centrípeta; por la 2ª ley de Newton, $F_G = ma_c$; $G\frac{M_S m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; al dividir los dos miembros por m, queda: $G\frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{r}$; el término de la izquierda representa la intensidad del campo gravitatorio solar en los puntos de la órbita, con lo que: $g = \frac{v^2}{r}$; $v^2 = gr$ $v = \sqrt{gr}$.

[b] Para los cálculos en este apartado se emplea la fórmula: $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}} = \sqrt{\frac{1{,}32\cdot 10^{20}}{r}}$.

[c] Por la ley de conservación del momento angular, se cumple que: $r_a v_a m = r_p v_p m$; tras simplificar la igualdad queda: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{2{,}47}{2{,}08} = 1,19$. La rapidez en el perihelio es 1,19 veces mayor que la rapidez en el afelio.

4. Satélite orbitando

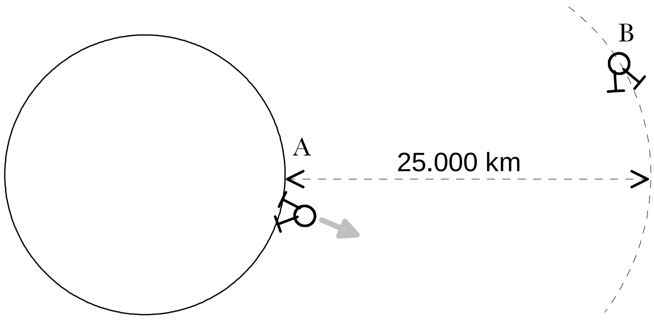
[a] Deduce la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
[b] Calcula la energía mínima que hay que comunicar a un satélite artificial de 3 T de masa para colocarlo en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 25.000 km sobre su superficie.
[c] ¿Qué tiempo invierte el satélite en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra? ¿Con qué rapidez recorre el satélite la órbita?

{DATOS: $GM_T = 4{,}00 \cdot 10^{14}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-1}$; $R_T = 6370$ km}

Respuesta

[a] La energía cinética de un satélite se calcula mediante: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Por otro lado, la fuerza gravitatoria de comporta como fuerza centrípeta; por la 2ª ley de Newton, $F_G = ma_c$; $G\frac{M_S m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; simplificando r, $G\frac{M_S m}{r} = mv^2$; llevando el producto de la derecha a la expresión de la energía cinética se obtiene la relación pedida: $E_c = \frac{1}{2}\frac{GM_S m}{r}$.

[b]



La energía mecánica se conserva: $E_m(A) = E_m(B)$; la energía que hay que comunicar al satélite es energía cinética:

$$-G\frac{M_T m}{R_T} + E_c(A) = -G\frac{M_T m}{2r}$$

$$E_c(A) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

Tenemos que:
$m = 3000\ kg$
$r = R_T + h = 3{,}14 \cdot 10^7\ m$

La energía mínima que hay que comunicar al satélite es, entonces, $E_c(A) =$
$= 4 \cdot 10^{14} \cdot 3000 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^7}\right) = 1{,}2 \cdot 10^{18} \cdot (1{,}57 \cdot 10^{-7} - 1{,}59 \cdot 10^{-8}) = 1{,}69 \cdot 10^{11}\ J.$

[c] La rapidez orbital está dada por: $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ (véase el ejercicio anterior); en la situación actual: $v = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{14}}{3{,}14 \cdot 10^7}} = 3{,}57 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$. El tiempo invertido en una vuelta completa -periodo del satélite- vale: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 3{,}14 \cdot 10^7}{3{,}57 \cdot 10^3} = 5{,}53 \cdot 10^4\ s = 15{,}4\ horas.$

5. En el campo eléctrico creado por tres cargas puntuales

Las cargas puntuales $q_1 = +3{,}0\cdot10^{-9}$ C, $q_2 = -5{,}0\cdot10^{-9}$ C y $q_3 = +4{,}0\cdot10^{-9}$ C ocupan, respectivamente, los puntos (0, 3), (4, 3) y (4, 0). Estas coordenadas están expresadas en metros.

[a] Calcula la intensidad del campo eléctrico resultante en el origen de coordenadas. Tienes que dar como respuesta el módulo, la dirección y el sentido.

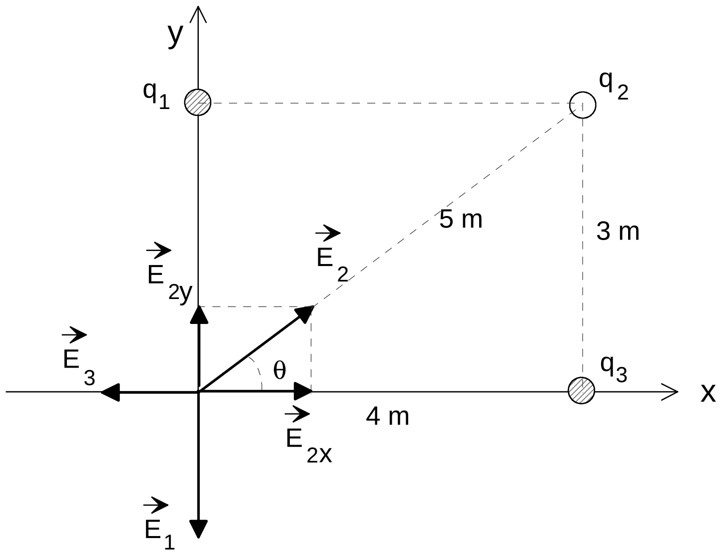
[b] Halla el potencial eléctrico total en el origen de coordenadas.

[c] ¿Cuál es el trabajo realizado sobre una carga $q = +10^{-8}$ C cuando se desplaza desde el origen de coordenadas hasta el ∞? Interpreta el resultado.

{DATO: $k_e = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$}

Respuesta

[a] En primer lugar, se dibuja un esquema con el sistema de cargas y se dibujan las intensidades del campo eléctrico creadas por cada una de las cargas.



Los módulos de las intensidades son:

$E_1 = 9\cdot10^9 \frac{3\cdot10^{-9}}{9} = 3\ \frac{N}{C}$

$E_2 = 9\cdot10^9 \frac{5\cdot10^{-9}}{25} = 1{,}8\ \frac{N}{C}$

$E_3 = 9\cdot10^9 \frac{4\cdot10^{-9}}{16} = 2{,}25\frac{N}{C}$

En segundo lugar, obtenemos las componentes de $\vec{E}_2$:

$E_{2x} = E_2\cos\theta = = 1{,}8\cdot\frac{4}{5} = 1{,}44\ \frac{N}{C}$

$E_{2y} = E_2 sen\theta = = 1{,}8\cdot\frac{3}{5} = 1{,}08\ \frac{N}{C}$

En tercer lugar, calculamos las componentes de la intensidad del campo eléctrico resultante:

$$\vec{E}_T\begin{cases} E_{T,x} = 1{,}44 - 2{,}25 = -0{,}81\ \frac{N}{C} \\ E_{T,y} = 1{,}08 - 3 = -1{,}92\ \frac{N}{C}\end{cases}.$$

El módulo de esta intensidad es: $E_T = \sqrt{(-0{,}81)^2 + (-1{,}92)^2} = 2{,}08\ \frac{N}{C}$. Su dirección y sentido se obtiene a partir de $tg\ \beta = \frac{1{,}92}{0{,}81} = 2{,}37$; $\beta = 67^0$; la intensidad resultante está en el tercer cuadrante, formando un ángulo de *247º* con el sentido +X.

[b] El potencial eléctrico total es: $V_T = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{3\cdot10^{-9}}{3} - \frac{5\cdot10^{-5}}{5} + \frac{4\cdot10^{-9}}{4}\right) = 9\ V.$

[c] Al tratarse de un campo conservativo, el trabajo es igual, con signo "-", a la variación de la energía potencial, esto es, $W_{O\to\infty} = -\Delta E_p = -q\cdot\Delta V = -q\cdot(V_\infty - V_O) = -10^{-8}\cdot(0-9) = 9\cdot10^{-8}\ J.$ Se trata de un trabajo positivo, realizado por las fuerzas del campo.

6. Movimiento entre placas cargadas

[a] Conservación de la energía mecánica en el campo eléctrico.

Dos láminas metálicas paralelas, separadas una distancia de 5 cm, se cargan sometiéndolas a una diferencia de potencial de 380 V.

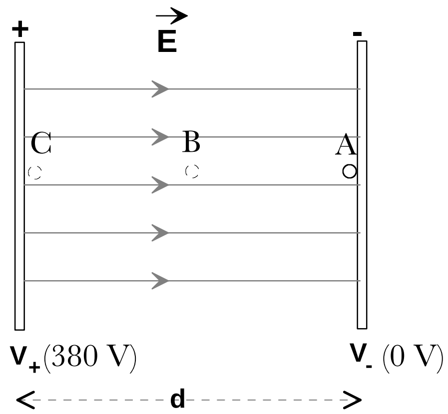
[b] Halla la intensidad del campo eléctrico, supuesta constante, entre las placas. Dibuja un esquema indicando la placa que está a mayor potencial.

[c] Se deja libre un electrón (m = $9,1.10^{-31} kg$, q = $-1,6.10^{-19} C$) en la placa negativa. Calcula la velocidad del electrón cuando pasa por un punto equidistante de las placas y cuando llega a la placa positiva.

Respuesta

[a] Debido a que el campo eléctrico es conservativo, se cumple que el trabajo es igual, con signo "-", a la variación de la energía potencial, esto es, $W = -\Delta E_p$; por otro lado, también se verifica el teorema de las fuerzas vivas: $W = \Delta E_c$. De ambas se deduce que: $\Delta E_c = -\Delta E_p$, esto es, $\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = 0$. La suma de las energías cinética y potencial recibe el nombre de energía mecánica, con lo que podemos escribir: $\Delta E_m = 0$, lo que significa que la energía mecánica no cambia, es constante. En resumen, en un campo eléctrico la energía mecánica de una partícula permanece constante.

[b]



Por tratarse de un campo eléctrico constante, se cumple que: $V_+ - V_- = E \cdot d$; *380 = 0,05 E;* $E = \frac{380(V)}{0,05(m)} = 7600 \ \frac{V}{m}$.

[c] La energía mecánica del electrón se conserva.

Em(A) = Em(B)

$0 + q_e V(A) = \frac{1}{2} m_e v_B^2 + q_e V(B)$

$\frac{1}{2} m_e v_B^2 = q_e [V(A) - V(B)]$

$$v_B = \sqrt{\frac{2q_e}{m_e}[V(A) - V(B)]} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot (-190)} = 8,17 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$$

Nótese que el potencial eléctrico en A es menor que el potencial eléctrico en B.

Em(A) = Em(C)

$0 + q_e V(A) = \frac{1}{2} m_e v_C^2 + q_e V(C)$; $\frac{1}{2} m_e v_C^2 = q_e [V(C) - V(B)]$

$$v_C = \sqrt{\frac{2q_e}{m_e}[V(A) - V(C)]} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot (-380)} = 11,6 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$$

Este apartado también puede resolverse por dinámica, ya que la aceleración es constante y el movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. Tomando todas las magnitudes positivas hacia la izquierda, la aceleración vale: $a = \frac{|q_e| E}{m_e} = 1,34 \cdot 10^{15} \ \frac{m}{s^2}$. En este tipo de movimiento se cumple que: $v_B^2 = 2 \cdot a \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot 1,34 \cdot 10^{15} \cdot 0,025 = 6,68 \cdot 10^{13}$; $v_B = 8,17 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$; de forma análoga, $v_C^2 = 2 \cdot a \cdot d = 2 \cdot 1,34 \cdot 10^{15} \cdot 0,05 = 1,34 \cdot 10^{14}$; $v_C = 11,6 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$.