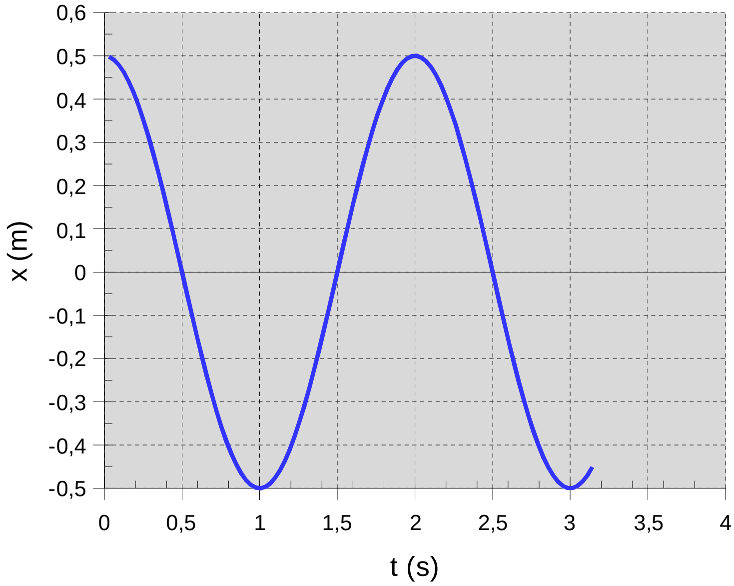
Nombre y apellidos: Puntuación:

1. Las gráficas nos informan

Una partícula de 250 g de masa está realizando un movimiento armónico simple. La figura representa la elongación en función del tiempo.



[a] Determina la expresión matemática de la elongación en función del tiempo.
[b] Obtén, en función del tiempo, las expresiones matemáticas de la velocidad y la aceleración.
[c] Calcula los valores de las energías potencial elástica, cinética y mecánica de la partícula en el instante t = 1 s.

Respuesta

[a] La expresión matemática de la elongación es de la forma: $x = A \text{ sen } (\omega t + \phi_o)$, por lo que deberemos obtener, a partir de la gráfica, los valores de la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial. Vemos que A = 0,5 m; el periodo T = 2 s y $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ (\frac{rad}{s})$. De las condiciones iniciales $\begin{cases} t = 0 \\ x = 0,5\ m \end{cases}$ se deduce que: $0,5 = 0,5 \text{ sen}\phi_o$; $sen\ \phi_o = 1$; $\phi_o = \frac{\pi}{2}\ (\frac{rad}{s})$. En consecuencia, la elongación, en función del tiempo, es: $x(t) = 0,5\ sen\ \left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m).

[b] La expresiones de la velocidad y de la aceleración se obtienen por derivación sucesiva: $v(t) = \frac{dx}{dt} = 0,5\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m/s) y $a(t) = -0,5\pi^2\ sen\ \left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m/s^2).

[c] Hay dos maneras de contestar a este apartado: trabajando con el tiempo o con la posición. La primera parece más complicada que la segunda. En cualquier caso, se necesita conocer el valor de la constante recuperadora: (N/m).
Si t = 1 s, $v = 0,5\pi \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ y la energía cinética es nula. Además, $x = 0,5\ sen\ \frac{3\pi}{2} = -0,5$ (m) y la energía potencial elástica es: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}2,47 \cdot (-0,5)^2 = 0,31$ J, valor que también corresponde a la energía mecánica.
Por otro lado, si t = 1 s, en la gráfica vemos que x = -0,5 m, por lo que la energía potencial elástica valdrá: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}2,47 \cdot (-0,5)^2 = 0,31$ J. La energía cinética se calcula mediante: $E_c = \frac{1}{2}m\omega^2\sqrt{A^2 - x^2}$, expresión que es nula en el punto considerado. La energía mecánica es igual, obviamente, a 31 J.

2. Buscando la ecuación de una onda armónica

Se genera una onda armónica transversal en una cuerda haciendo vibrar un extremo de la misma con una frecuencia de 90 Hz y una amplitud de 1,0 mm. La onda avanza en el sentido +X y tiene una velocidad de 360 m/s.
En el instante t = 0, el extremo de la cuerda en x = 0, tiene un desplazamiento de 0,50 mm.

[a] Calcula la fase inicial ϕ_o, la frecuencia angular y el número de onda.
[b] Escribe la expresión matemática de la dicha onda armónica.
[c] Determina, en función del tiempo, la velocidad de oscilación de un punto situado en x = 1,00 m.
[d] ¿Qué significa decir que el movimiento ondulatorio es doblemente periódico?

Respuesta

---

[a] La ecuación de la onda es de la forma: $y(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx + \phi_o)$ y los valores de las constantes A, ω, k y ϕ_o se obtienen de la descripción dada en el enunciado.
La amplitud A = 10^{-3} m, la frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 180\pi$ (rad/s) y el número de onda (m^{-1}). De las condiciones iniciales $\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$ $y = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m, se deduce que: $0,5 \cdot 10^{-3} = 10^{-3} \text{ sen } \phi_o$; $sen\ \phi_o = 0,5$ y $\phi_o = \frac{\pi}{6}$ (rad).

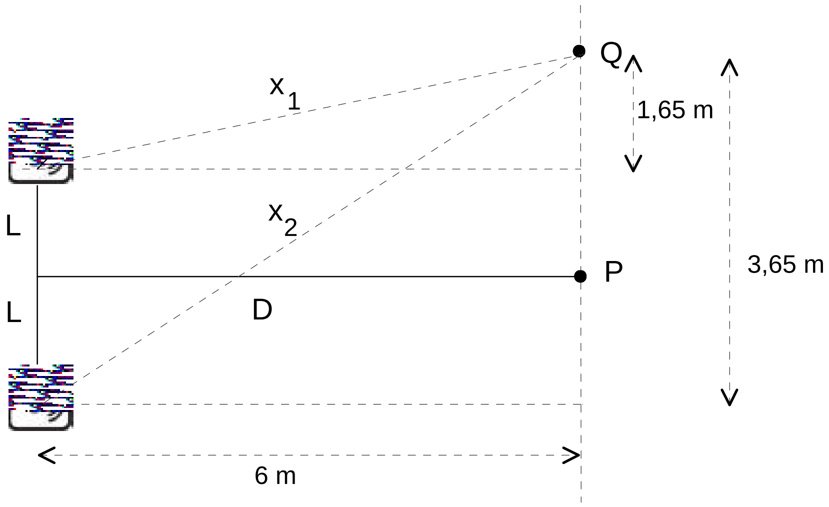
[b] La ecuación de la onda es, entonces, $y(x,t) = 10^{-3} \text{ sen } \left(180\pi t - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ (m)

[c] Si x = 1 m, el correspondiente punto de la cuerda vibra de acuerdo con la expresión: $y(1,t) = 10^{-3} \text{ sen } \left(180\pi t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 10^{-3} \text{ sen } \left(180\pi t - \frac{2\pi}{6}\right)$ (m). La velocidad de oscilación de dicho punto es, entonces, $v_{transversal} = \frac{dy}{dt} = 180\pi \cdot 10^{-3} \cos \left(180\pi t - \frac{2\pi}{6}\right)$ (m/s).

[d] Hay que hablar de periodicidad en el espacio (el perfil de la onda se repite cada longitud de onda) y de periodicidad en el tiempo (la onda tarda un periodo en recorrer una longitud de onda y un punto cualquiera del medio tarda un periodo en hacer una oscilación completa).

3. Propiedades del sonido

A. Dos altavoces, que emiten en fase sonidos idénticos, están separados entre sí una distancia *2L* (L = 1 m). A una distancia D = 6 m, se instala un detector de sonido que se puede mover paralelamente a la recta que une los altavoces. La velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s.



[a] Razona si en el punto P existe interferencia constructiva o destructiva.

[b] Se observa que el punto Q, que se encuentra a 2,65 m del punto P, corresponde al 2º máximo de intensidad sonora. Calcula la frecuencia del sonido emitido por los altavoces.

B.

[a] Algunas lavadoras trabajan con un nivel de intensidad sonora de 60 dB. ¿Cuál es la intensidad del sonido que emiten?

[b] En una lavandería existe 25 lavadoras como la citada en el apartado anterior. Halla el nivel de intensidad sonora cuando todas están funcionando a la vez.

[AYUDA: $I_o = 10^{-12}$ W/m^2]

Respuesta

A.

[a] La condición para que exista interferencia constructiva en un punto es que la diferencia de recorridos desde las fuentes hasta dicho punto sea nula o un múltiplo entero de la longitud de onda: $\Delta x = n\lambda$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Para el punto P se cumple que dicha diferencia es nula; por lo tanto, en el punto P existe interferencia constructiva.

[b] En el punto Q, 2º máximo de intensidad sonora y punto de interferencia constructiva, se debe cumplir la relación anterior para n = 1, esto es, $\Delta x = \lambda = \frac{v}{f}$. Observa en la gráfica que x_2 y x_1 son las distancias recorridas por las ondas hasta el punto Q; se pueden calcular mediante el teorema de Pitágoras: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{1,65^2 + 36} = 6,22\ m \\ x_2 = \sqrt{3,65^2 + 36} = 7,02\ m \end{array} \right.$ $\Delta x = 7,02 - 6,22 = 0,8\ m$; se cumple que: $f = \frac{v}{\Delta x} = \frac{340}{0,8} = 425\ Hz$.

B.

[a] El nivel de intensidad sonora está dado por: $\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$; de ahí se deduce que: $I = I_o\ 10^{\beta/10}$; en nuestro caso, $I = 10^{-12} \cdot 10^6 = 10^{-6}$ (W/m^2).

[b] En la lavandería, $I_T = 25 \cdot 10^{-6} \left(\frac{W}{m^2}\right)$, por lo que el nivel de intensidad sonora en dicho establecimiento es: $\beta = 10 \log \frac{25 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 25 \cdot 10^6 = 74$dB.

4. El planeta desconocido

[A] Contesta al siguiente tema: "Momento angular de una partícula. Momento de una fuerza. Relación entre ambas magnitudes."

[B] Un astronauta se aproxima a un planeta desconocido que posee un satélite artificial de 550 kg de masa. El astronauta lleva a cabo rápidamente las siguientes mediciones: el radio de la órbita circular del satélite $r = 8\cdot 10^6\ m$ y su periodo de revolución $T = 10\ h$. Ayuda al astronauta y calcula:

[a] la masa del planeta;

[b] la rapidez orbital del satélite;

[c] el módulo del momento angular del satélite respecto al centro del planeta.

{DATO: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$}

Respuesta

[A]

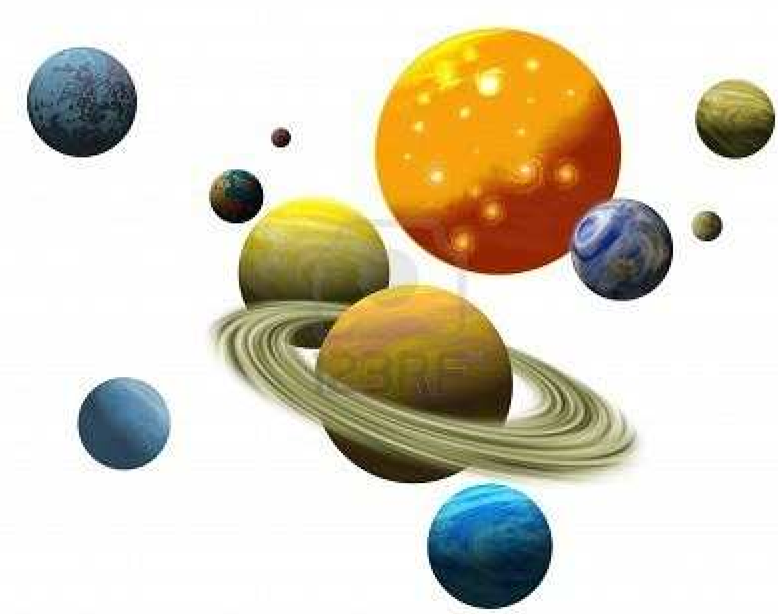
Ten en cuenta que se trata de dos magnitudes vectoriales y que están definidas respecto a un punto, por lo que deberás indicar el módulo, la dirección y el sentido.
Respecto a la segunda parte, has de calcular la variación temporal del momento angular y demostrar que es igual al momento de la fuerza.

[B]

[a] Se cumple que la fuerza gravitatoria se comporta como fuerza centrípeta, esto es, ; se simplifica *m* y se comprueba que: $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$. Para nuestro astronauta, $r = 8\cdot 10^6\ m$ y $T = 3{,}6\cdot 10^4\ s$, por lo que $M = \frac{4\pi^2\cdot(8\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3{,}6\cdot 10^4)^2} = 2{,}34\cdot 10^{23}$ kg.

[b] Hay dos maneras de calcularla: una, a partir del radio de la órbita y del periodo; otra, a partir del hecho de que la fuerza gravitatoria se comporta como fuerza centrípeta. La primera nos lleva a: $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 8\cdot 10^6}{3{,}6\cdot 10^4} = 1{,}40\cdot 10^3$ m/s. En la segunda, tenemos que: $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; al simplificar se llega a: ; $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2{,}34\cdot 10^{23}}{8\cdot 10^6}} = 1{,}40\cdot 10^3$ m/s.

[c] Al ser la órbita circular, el vector de posición del satélite y su velocidad (y también su momento lineal) son perpendiculares; por lo tanto, el momento angular del satélite será: $L_O = rmv\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 8\cdot 10^6\cdot 550\cdot 1{,}4\cdot 10^3 = 6{,}16\cdot 10^{12}$ kg m^2 s^{-1}.



5. El planeta Mercurio

El planeta Mercurio, que tiene una masa de $3{,}3 \cdot 10^{23}$ kg y un radio de 2440 km, se mueve alrededor del Sol en una órbita casi circular de $5{,}8 \cdot 10^{10}$ m de radio.

[a] La superficie de Mercurio está llena de cráteres y no es conveniente permanecer en ella. Calcula la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio.

[b] Determina las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en su movimiento alrededor del Sol.

[c] ¿Cuánta energía adicional habrá que suministrar a Mercurio para aumentar el radio de su órbita hasta $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m?

[d] ¿Cuánta energía adicional, desde la órbita inicial, habrá que suministrar a Mercurio para que salga del campo gravitatorio solar?

{OTROS DATOS: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg^{-2}; $M_{Sol} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg}

Respuesta

[a] La velocidad de escape desde la superficie de un planeta de masa M y radio R está dada por:
$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{23}}{2{,}44 \cdot 10^{6}}} = 4{,}25 \cdot 10^{3}$ m/s.

[b] La energía mecánica de Mercurio en el campo gravitatorio solar es:
$E_M = -\frac{1}{2} G \frac{M_{Sol} M_M}{r} = -\frac{1}{2} 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{23}}{5{,}8 \cdot 10^{10}} = -3{,}80 \cdot 10^{32}$ J.
La energía potencial gravitatoria de Mercurio vale: $E_p = -G \frac{M_{Sol} M_M}{r} = -7{,}59 \cdot 10^{32}$ J. La energía cinética se puede calcular como diferencia de las dos anteriores:
$E_c = E_M - E_p = -3{,}80 \cdot 10^{32} + 7{,}59 \cdot 10^{32} = 3{,}79 \cdot 10^{32}$ J.

[c] La energía que hay que suministrar a Mercurio es la diferencia entre las energías mecánicas final e inicial:
$\Delta E = -\frac{1}{2} G M_{Sol} M_{Mercurio} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -2{,}20 \cdot 10^{43} \left(\frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{5{,}8 \cdot 10^{10}} \right) = 2{,}32 \cdot 10^{32}$ J.

[d] Se supone que cuando Mercurio abandona el campo gravitatorio solar su energía mecánica es nula, por lo que, aplicando el mismo razonamiento que en el apartado anterior, $\Delta E' = 0 + \frac{1}{2} G \frac{M_{Sol} M_{Mercurio}}{r_1} = 3{,}80 \cdot 10^{32}$ J. Nótese que está energía es mayor que la del apartado (c), como no podía ser de otra manera.

6. Descripción vectorial del campo eléctrico

[a] Intensidad del campo eléctrico: casos de una carga puntual y de varias cargas.

Las cargas $Q_1=6.10^{-6}$ C y $Q_2=-3,6.10^{-6}$ C están localizadas en los puntos (2, 0) m y (0, 4) m, respectivamente.

[b] Calcula la intensidad del campo eléctrico resultante (módulo, dirección y sentido) en el punto P(5, 4) m.

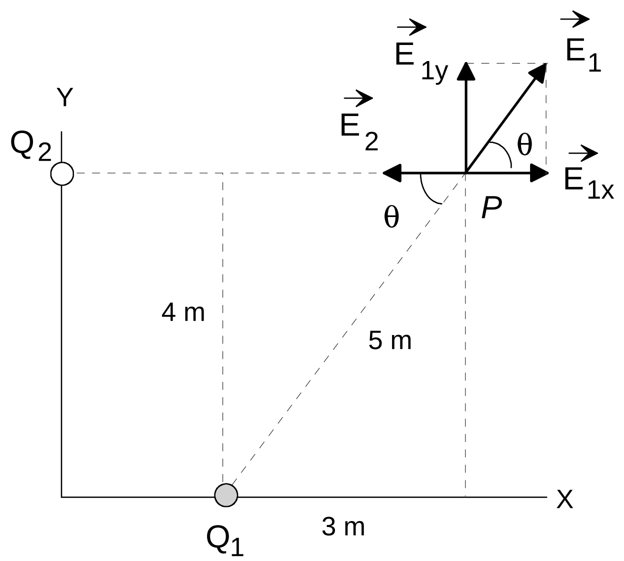
[c] Halla la diferencia de potencial entre el punto P y el origen de coordenadas.

{DATO: Constante de Coulomb: $K = 9\cdot 10^9$ N.m².C²}

Respuesta

[a] Véase, una vez más, el libro de Física.

[b] *1.* Se traza los vectores intensidad del campo eléctrico.



2. Se calcula los módulos de dichos vectores.

$E_1 = 9\cdot 10^9 \frac{6\cdot 10^{-6}}{25} = 2160$ N/C

$E_2 = 9\cdot 10^9 \frac{3,6\cdot 10^{-6}}{25} = 1296$ N/C

3. Se descomponen los vectores y se halla sus módulos.

En la figura adjunta vemos cómo se ha dibujado las componentes del vector $\vec{E}_1$. Tenemos que:

$E_{1x} = E_1 \cos\theta = 2160\cdot\frac{3}{5} = 1296\ \left(\frac{N}{C}\right)$

$E_{1y} = E_1\ \mathrm{sen}\ \theta = 2160\cdot\frac{4}{5} = 1728\ \left(\frac{N}{C}\right)$

4. Determina, en módulo, dirección y sentido, la intensidad del campo eléctrico resultante.

Vemos que los vectores $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_{1x}$ tienen la misma dirección, sentidos opuestos e idéntico módulo, por lo que se anulan mutuamente; en consecuencia, la intensidad del campo eléctrico resultante coincide con $\vec{E}_{1y}$. En resumen, la intensidad del campo eléctrico resultante tiene un módulo de 1728 N/C, la dirección vertical y el sentido hacia arriba.

[c] Aplicamos el principio de superposición:

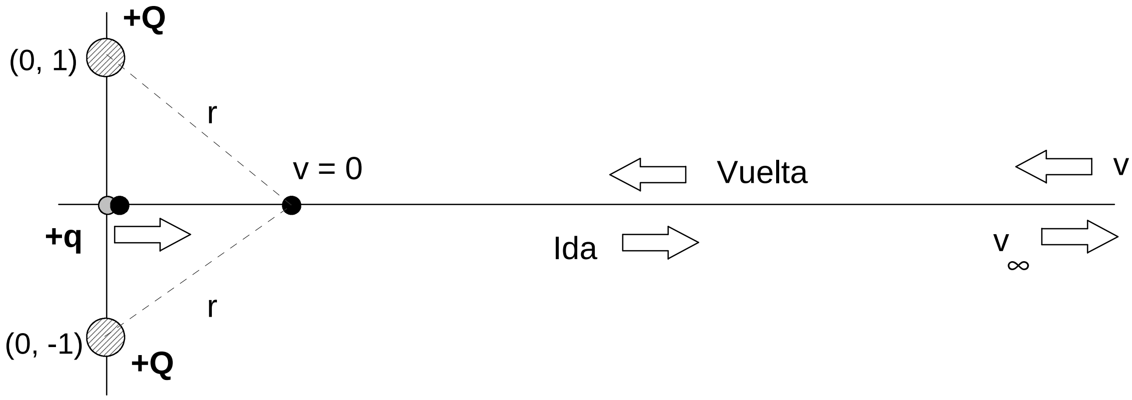
$V_O = 9\cdot 10^9 \frac{6\cdot 10^{-6}}{2} + 9\cdot 10^9 \frac{(-3,6\cdot 10^{-6})}{4} = 27\cdot 10^3 - 8,1\cdot 10^3 = 15,9\cdot 10^3$ V

$V_P = 9\cdot 10^9 \frac{6\cdot 10^{-6}}{5} + 9\cdot 10^9 \frac{(-3,6\cdot 10^{-6})}{5} = (10,8 - 6,28)\cdot 10^3 = 4,32\cdot 10^3$ V

La diferencia de potencial pedida es, entonces, $V_P - V_O = -11,58\cdot 10^3$ V.

7. ¡Hasta el infinito!

Dos cargas iguales de valor **+Q** están fijas, respectivamente, en los puntos (0, 1) m y (0, -1) m. Una partícula de carga **+q** y masa **+m** se encuentra inicialmente en reposo en el origen de coordenadas -ver la figura-. Se separa infinitesimalmente la partícula hacia la derecha y vemos que, al dejarla en libertad, se desplaza en el sentido +X.



[a] Conservación de la energía mecánica en el campo eléctrico.

[b] Halla, por consideraciones de energía, la rapidez de la partícula cuando x tiende a ∞.

[c] Si la partícula se lanza desde el infinito en el eje X, hacia la izquierda, con una rapidez igual a la mitad de la obtenida en el apartado anterior, ¿en qué punto del eje X quedará momentáneamente en reposo?

Respuesta

[a] El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una partícula es igual, por un lado, a menos la variación de la energía potencial eléctrica y, por otro lado, a la variación de la energía cinética de la partícula. De ambas igualdades se obtiene la ley de conservación de la energía mecánica.

[b] Se cumple que la energía mecánica de la partícula se conserva: E_M (O) = E_M (∞). En el origen de coordenadas sólo hay energía potencial eléctrica y cuando x tiene a ∞ sólo hay energía cinética: $2k\frac{Qq}{1} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$; $v_\infty^2 = \frac{4kQq}{m}$; $v_\infty = 2\sqrt{\frac{kQq}{m}}$ (m/s).

[c] Ahora la partícula se lanza hacia la izquierda con una rapidez $v = \sqrt{\frac{kQq}{m}}$. Por la conservación de la energía mecánica, $E_{M,inicial} = E_{M,final}$, es decir, $\frac{1}{2}mv^2 = 2k\frac{Qq}{r}$; al sustituir el valor de la rapidez, queda: $\frac{1}{2}m\left(\frac{kQq}{m}\right) = 2k\frac{Qq}{r}$; $\frac{1}{2}kQq = 2\frac{kQq}{r}$; r = 4 m. Por otro lado, $r = \sqrt{x^2+1}$; 16 = x^2 + 1; $x = \sqrt{15} = 3,87$ m.